1. (Pucrj 2015) Os números $a_1 = 5x - 5,\ a_2 = x + 14$ e $a_3 = 6x - 3$ estão em PA.
A soma dos 3 números é igual a:

a) 48 b) 54 c) 72 d) 125 e) 130

2. (Fuvest 2015) Dadas as sequências
$a_n = n^2 + 4n + 4,\ b_n = 2^{n^2},\ c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, definidas para valores inteiros positivos de n, considere as seguintes afirmações:

I. a_n é uma progressão geométrica;
II. b_n é uma progressão geométrica;
III. c_n é uma progressão aritmética;
IV. d_n é uma progressão geométrica.

São verdadeiras apenas
a) I, II e III.
b) I, II e IV.
c) I e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

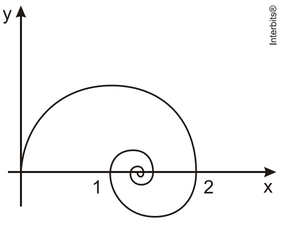
3. (Uece 2015) Os números reais positivos $x,\ y$ e z são tais que $\log x,\ \log y,\ \log z$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Nestas condições, podemos concluir acertadamente que entre os números $x,\ y$ e z existe a relação
a) $2y = x + z.$
b) $y = x + z.$
c) $z^2 = xy.$
d) $y^2 = xz.$

4. (Unicamp 2015) Se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13})$ é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é $78,$ então α_7 é igual a
a) 6. b) 7. c) 8. d) 9.

5. (Uece 2015) Para qual valor do número inteiro positivo n a igualdade $\dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{2+4+6+\ldots+2n} = \dfrac{2014}{2015}$ é satisfeita?

a) 2016. b) 2015. c) 2014. d) 2013.

6. (Espcex (Aman) 2015) Na figura abaixo temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a



desenho ilustrativo-fora de escala

a) π. b) 2π. c) 3π. d) 4π. e) 5π.

7. (Udesc 2015) Os números reais $a,\ b$ e c são tais que a progressão geométrica $S_1 = \{5a - b, b, 48, \ldots\}$ e a progressão aritmética $S_2 = \{c, a - b, -6a - c, \cdots\}$ possuem razões opostas. Então, o valor de é $a + b + c$ igual a:

a) 3 b) 20 c) 13 d) 15 e) 10

8. (Unifor 2014) Um ciclista pedala $310\,\text{km}$ em cincos dias. Cada dia ele pedala $10\,\text{km}$ a mais do que andou no dia anterior. Assim a distância pedalada pelo ciclista no primeiro dia foi:
a) 36 km b) 40 km c) 42 km d) 44 km

9. (Espcex (Aman) 2014) Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha	1					
2ª linha	3	5				
3ª linha	7	9	11			
4ª linha	13	15	17	19		
5ª linha	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:

a) 807 b) 1007 c) 1307 d) 1507 e) 1807

10. (Unicamp 2014) Dizemos que uma sequência de números reais não nulos $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ é uma <u>progressão harmônica</u> se a sequência dos inversos $\left(\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3}, \dfrac{1}{a_4}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética (PA).

a) Dada a progressão harmônica $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{1}{2}, \ldots\right)$, encontre o seu sexto termo.
b) Sejam a, b e c termos consecutivos de uma progressão harmônica. Verifique que $b = \dfrac{2ac}{a+c}$.

11. (Ucs 2014) Uma cultura de bactérias tinha, no final do primeiro dia, k indivíduos; no final do segundo dia, o dobro de k; no final do terceiro dia, o triplo de k; e, assim, sucessivamente.

Se, no final do vigésimo dia, havia $10,5 \cdot 10^6$ indivíduos, qual era o número de indivíduos no final do primeiro dia?

a) $5 \cdot 10^4$
b) $5,25 \cdot 10^4$
c) $5,25 \cdot 10^5$
d) $5 \cdot 10^5$
e) $5,25 \cdot 10^3$

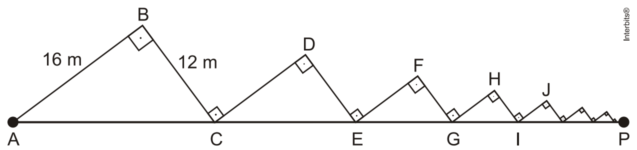
12. (Unicamp 2014) O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a

a) 3,0 m^2. b) 2,0 m^2. c) 1,5 m^2. d) 3,5 m^2.

13. (Ime 2014) Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) 1

14. (Espm 2014) A figura abaixo mostra a trajetória de um móvel a partir de um ponto A, com $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{EF}$, $\overline{FG} = \overline{GH}$, $\overline{HI} = \overline{IJ}$ e assim por diante.



Considerando infinita a quantidade desses segmentos, a distância horizontal AP alcançada por esse móvel será de:
a) 65 m
b) 72 m
c) 80 m
d) 96 m
e) 100 m

15. (Unesp 2013) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $3n^2 - 2n$, onde n é um número natural. Para essa progressão, o primeiro termo e a razão são, respectivamente,
a) 7 e 1.
b) 1 e 6.
c) 6 e 1.
d) 1 e 7.
e) 6 e 7.

16. (G1 - utfpr 2013) A quantidade de números inteiros entre 50 e 100 que sejam múltiplos dos números 3 e 4 ao mesmo tempo é:

a) 3. b) 4. c) 5. d) 13. e) 17.

17. (Mackenzie 2013) Em uma progressão aritmética o primeiro termo é 2 e a razão é 4. Nessa progressão, a média aritmética ponderada entre o terceiro termo, com peso 2, e 10% da soma dos cincos primeiros termos, com peso 3, é

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

18. (Unesp 2013) A sequência dos números $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i, \ldots$ está definida por $\begin{cases} n_1 = 3 \\ n_{i+1} = \dfrac{n_i - 1}{n_i + 2}, \end{cases}$ para cada inteiro positivo i.
Determine o valor de n_{2013}.

19. (Espm 2013) Um empréstimo de R\$ 10.000,00 foi pago em 5 parcelas mensais, sendo a primeira, de R\$ 2.000,00, efetuada 30 dias após e as demais com um acréscimo de 10% em relação à anterior. Pode-se concluir que a taxa mensal de juros simples ocorrida nessa transação foi de aproximadamente:
a) 2,78%
b) 5,24%
c) 3,28%
d) 6,65%
e) 4,42%

20. (Fgv 2013) Um capital A de R\$10.000,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 20% ao ano; simultaneamente, um outro capital B, de R\$5.000,00, também é aplicado a juros compostos, à taxa de 68% ao ano.
Utilize a tabela abaixo para resolver.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log x	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,96

Depois de quanto tempo os montantes se igualam?
a) 22 meses.
b) 22,5 meses.
c) 23 meses.
d) 23,5 meses.
e) 24 meses.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[B]

Considerando a P.A. na ordem dada, temos:
P.A. $(5x-5,\ x+14,\ 6x-3)$

Utilizando a propriedade de uma P.A, temos:
$$x+14=\frac{5x-5+6x-3}{2}\Rightarrow 2x+28=11x-8\Rightarrow -9x=-36\Rightarrow x=4$$

Logo, a P.A. será $(15,\ 18,\ 21)$.
Portanto, a soma do três números será:
$a_1+a_2+a_3=15+18+21=54.$

Resposta da questão 2:
[E]

[I] Falsa. Tem-se que $a_{n+1}=(n+2)^2$. Logo, como a razão

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+3)^2}{(n+2)^2}=\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^2$$

não é constante, segue que a_n não é uma progressão geométrica.

[II] Falsa. De fato, a razão

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}}=2^{n^2+2n+1-n^2}=2^{2n+1}$$

não é constante. Daí, podemos concluir que b_n não é uma progressão geométrica.

[III] Verdadeira. A diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência c_n é

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=(n+1)^2+4(n+1)+4-(n^2+4n+4)\\&=n^2+2n+1+4n+4-n^2-4n-4\\&=2n+1.\end{aligned}$$

Desse modo, c_n é uma progressão aritmética de primeiro termo 3 e razão igual a 2.

[IV] Verdadeira. De (II), temos $d_n=2^{2n+1}$, que é uma progressão geométrica de primeiro termo 8 e razão igual a 4.

Resposta da questão 3:
[D]

Tem-se que

$$\begin{aligned}\log y-\log x=\log z-\log y&\Leftrightarrow \log\frac{y}{x}=\log\frac{z}{y}\\&\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{z}{y}\\&\Leftrightarrow y^2=xz.\end{aligned}$$

Resposta da questão 4:
[A]

Como α_7 é o termo médio da progressão aritmética, segue-se que $78=\alpha_7\cdot 13$ e, portanto, temos $\alpha_7=6.$

Resposta da questão 5:
[C]

Tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{2+4+6+\ldots+2n}=\frac{2014}{2015}&\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1+2n-1}{2}\right)n}{\left(\frac{2+2n}{2}\right)n}=\frac{2014}{2015}\\&\Leftrightarrow \frac{n}{1+n}=\frac{2014}{2015}\\&\Leftrightarrow n=2014.\end{aligned}$$

Resposta da questão 6:
[B]

Comprimento de uma semicircunferência de raio $r:\ \frac{2\pi r}{2}=\pi\cdot r$

Logo, a soma pedida será dada por:

$$S=\pi\cdot 1+\pi\cdot 2+\pi\cdot 4+\pi\cdot 8+\ldots$$
$$S=\pi\cdot(1+2+4+8+\ldots)$$
$$S=\pi\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$S=2\cdot\pi$$

Resposta da questão 7:
[E]

Sejam q e r, respectivamente as razões de S_1 e S_2.

De S_2, vem

$$2(a-b)=c+(-6a-c)\Leftrightarrow b=4a.$$

Logo, tem-se que $S_1=\{a,\ 4a,\ 48,\ldots\}$ e, portanto, $q=\frac{4a}{a}=4.$ Em consequência, dado que q e r são opostas, encontramos $r=-4$ e $\frac{48}{4a}=4,$ o que implica em

$a = 3.$ Daí, temos $b = 12$ e $c = -5,$ pois $b = 4a$ e $a - b - c = -4.$

Por conseguinte, o valor de $a + b + c$ é $10.$

Resposta da questão 8:
[C]

Seja n a distância, em quilômetros, pedalada pelo ciclista no primeiro dia. Dado que o ciclista pedala $10\,km$ a mais do que pedalou no dia anterior, vem

$$\begin{aligned} n + n + 10 + n + 20 + n + 30 + n + 40 = 310 &\Leftrightarrow 5n = 210 \\ &\Leftrightarrow n = 42\,km. \end{aligned}$$

Resposta da questão 9:
[E]

Até a 42ª linha, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 40 + 41 + 42 = \frac{(1 + 42)\cdot 42}{2} = 903 \text{ termos.}$$

Portanto, o primeiro elemento da 43ª linha será o 904º número natural ímpar. Então:

$$a_{904} = 1 + 903 \cdot 2 = 1807.$$

Resposta da questão 10:

a) Se a progressão $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ é harmônica, então a sequência $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética de razão $\frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}.$ Daí, seu sexto termo é dado por

$$a_6 = \frac{5}{2} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

Em consequência, o resultado pedido é $\frac{4}{5}.$

b) Sabendo que em toda progressão aritmética cada termo é igual à média aritmética do seu antecessor e do seu sucessor (exceto o primeiro e o último), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} &\Leftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{a + c}{ac} \\ &\Leftrightarrow b = \frac{2ac}{a + c}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 11:
[C]

Tem-se que $20 \cdot k = 10{,}5 \cdot 10^6 \Leftrightarrow k = 5{,}25 \cdot 10^5.$

Resposta da questão 12:
[C]

Sejam $x, x + r$ e $x + 2r$ as medidas, em metros, dos lados do triângulo, com $x, r > 0.$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos $x = 3r.$ Logo, os lados do triângulo medem $3r, 4r$ e $5r.$

Sabendo que o perímetro do triângulo mede $6{,}0\,m,$ vem

$$3r + 4r + 5r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a área do triângulo é igual a

$$\frac{3r \cdot 4r}{2} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1{,}5\,m^2.$$

Resposta da questão 13:
[B]

Considerando os três números me P.A. $(a - r),$ a e $(a + r),$ temos:

$$S_1 = (a - r) + a + (a + r) = 3a$$
$$S_2 = (a - r)^2 + a^2 + (a + r)^2 = 3a^2 + 2r^2$$

Logo,

$$x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 3ax + \left(3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

As raízes da equação são a e $(a + r).$ Logo:

$$a + a + r = 3a \Rightarrow a = r$$
$$a \cdot (a + r) = 3a^2 + 2 \cdot r^2 - \frac{1}{2}$$

Como $a = r$, temos:

$$r \cdot (r + r) = 3r^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}$$
$$3 \cdot r^2 = \frac{1}{2}$$
$$r = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Como $r \geq 0$, temos: $r = \frac{\sqrt{6}}{6}.$

Resposta da questão 14:
[C]

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo $ABC,$ encontramos facilmente $\overline{AC} = 20\,m.$

Os triângulos $ABC, CDE, EFG, \dots$ são semelhantes por AA. Logo, como a razão de semelhança é igual a $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, segue-se que $\overline{AC} = 20\text{ m}$, $\overline{CE} = 15\text{ m}$, $\overline{EG} = \frac{45}{4}\text{ m}, \dots$ constituem uma progressão geométrica cujo limite da soma dos n primeiros termos é dado por $\frac{20}{1-\frac{3}{4}} = 80\text{ m}.$

Resposta da questão 15:
[B]

P.A.(a_1, a_2, a_3, a_4,...)

$$a_1 = S_1 = 3.1^2 - 2.1 = 1$$

$$a_1 + a_2 = S_2 = 3.2^2 - 2.2 = 8 \Rightarrow 1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 7$$

Razão r = 7 – 1 = 6, portanto a_1 = 1 e razão r = 6.

Resposta da questão 16:
[B]

MMC(3,4) = 12

Múltiplos de 12 são múltiplos de 3 e de 4 ao mesmo tempo.

Múltiplos de 12 entre 50 e 100 (60, 72, ..., 84, 96).

Utilizando a fórmula do termo geral da P.A., temos:

96 = 60 + (n–1) · 12 (em que n é o número de múltiplos de 12 entre 50 e 100)

$$36 = (n-1)\cdot 12$$
$$n - 1 = 3$$
$$n = 4$$

Resposta da questão 17:
[D]

O terceiro termo da P.A. será dado por: a_3 = 2 + 2.4 = 10
O quinto termo da P.A. será dado por: a_5 = 2 + 4.4 = 18
A soma dos cinco primeiros termos será dada por:

$$S_5 = (2+18)\frac{5}{2} = 50.$$

Logo, a média M pedida será dada por:

$$M = \frac{(10\cdot 2 + 3\cdot 0,1\cdot 50)}{5} = \frac{(20+15)}{5} = 7.$$

Resposta da questão 18:

Temos $n_{6k+1} = 3$, $n_{6k+2} = \frac{2}{5}$, $n_{6k+3} = -\frac{1}{4}$, $n_{6k+4} = -\frac{5}{7}$, $n_{6k+5} = -\frac{4}{3}$ e $n_{6k+6} = -\frac{7}{2}$, para todo k natural. Portanto, $n_{2013} = n_{6\cdot 335+3} = -\frac{1}{4}$.

Resposta da questão 19:
[E]

Como as parcelas crescem segundo uma progressão geométrica de razão $1,1$ e primeiro termo igual a 2000, segue que o montante pago foi de

$$2000\cdot\frac{(1,1)^5 - 1}{1,1-1} = 2000\cdot 6,1051$$
$$= R\$\,12.210,20.$$

Logo, os juros cobrados correspondem a $12210,2 - 10000 = R\$\,2.210,20$ e, portanto, a taxa de juros simples na transação é igual a

$$\frac{2210,2}{10000\cdot 5}\cdot 100\% \cong 4,42\%.$$

Resposta da questão 20:
[E]

Temos $M_A = 10000\cdot(1,2)^t$ e $M_B = 5000\cdot(1,68)^t$. Logo,

$$\begin{aligned}
10000\cdot(1,2)^t = 5000\cdot(1,68)^t &\Leftrightarrow \left(\frac{1,68}{1,2}\right)^t = 2 \\
&\Leftrightarrow \log(1,4)^t = \log 2 \\
&\Leftrightarrow t\cdot(\log 2 + \log 7 - \log 10) = \log 2 \\
&\Rightarrow t\cdot(0,3 + 0,85 - 1) \cong 0,3 \\
&\Leftrightarrow t \cong \frac{0,30}{0,15} \\
&\Leftrightarrow t \cong 2.
\end{aligned}$$

Portanto, os montantes se igualarão, aproximadamente, após 2 anos (ou 24 meses).