1. (Fuvest 2018) Considere a sequência

$a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 2,$ e $a_n = a_{n-4},$ para $n \geq 5.$ Defina $S_n^k = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$ para $k \geq 0,$ isto é, S_n^k é a soma de $k+1$ termos consecutivos da sequência começando do $n-$ésimo, por exemplo, $S_2^1 = 4 + 1 = 5.$

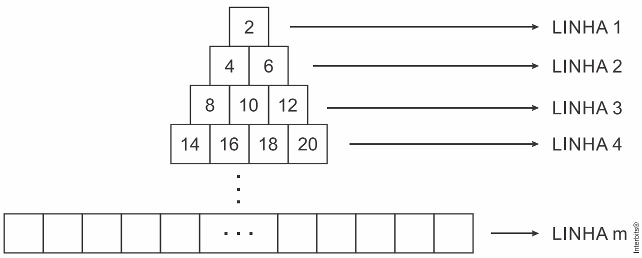
a) Encontre n e k tal que $S_n^k = 20.$

b) Para cada inteiro $j, 1 \leq j \leq 12,$ encontre n e k tal que $S_n^k = j.$

c) Mostre que, para qualquer inteiro $j, j \geq 1,$ existem inteiros $n \geq 1$ e $k \geq 0$ tais que $S_n^k = j.$

2. (Pucrj 2018) A figura abaixo representa caixas com mercadorias em um galpão do porto. Essas caixas, para melhor identificação, possuem um número em sua face frontal e são empilhadas seguindo um padrão.

Assim, por exemplo, a 2ª caixa da 4ª linha é indicada pelo número $16.$



Observe que a *m*-ésima linha tem m caixas e que usamos apenas os números pares.

a) Qual é o número na 1ª caixa da 6ª linha?

b) Qual é a soma dos números na 7ª linha?

c) Escreva, apenas em função de $m,$ uma fórmula para a soma dos números nas m primeiras linhas.

3. (Mackenzie 2018) Se A, B, C e D são termos consecutivos de uma progressão aritmética e $C^2 - B^2 \neq 0$ então o valor de $\dfrac{D^2 - A^2}{C^2 - B^2}$ é

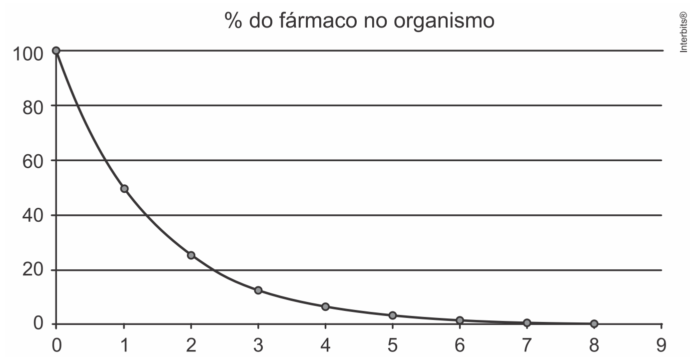
a) 0 b) 1 c) 3 d) 5 e) 7

4. (Ufrgs 2018) Em uma escola, as turmas de ensino médio totalizam 231 estudantes. Para uma atividade festiva na escola, todos esses estudantes foram dispostos em filas, obedecendo à seguinte disposição: 1 estudante na primeira fila, 2 estudantes na segunda fila, 3 estudantes na terceira fila, e assim sucessivamente.

O número de filas que foram formadas com todos os estudantes é

a) $19.$ b) $21.$ c) $22.$ d) $23.$ e) $25.$

5. (Fcmmg 2018) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, que é o tempo necessário para que a quantidade original do medicamento no organismo se reduza à metade. Numa prescrição médica, esse tempo representa uma das variáveis a serem analisadas e por ele é possível prever a quantidade do fármaco que ainda se encontra presente no organismo do paciente. Graficamente, como indicado na figura abaixo, a relação das meias-vidas de um fármaco, em função da $\%$ do fármaco, no organismo, gera a curva de uma função exponencial.



A Prednisona é um medicamento anti-inflamatório, antialérgico e antirreumático que serve para o tratamento de reumatismo, alergias, doenças dermatológicas, tumores, entre outras indicações. Possui meia-vida de aproximadamente 3 horas e pode ser encontrada nas farmácias, em embalagem contendo comprimidos de 20 mg.

Se, no tratamento de determinado paciente, foram prescritos 3 comprimidos de 20 mg de Prednisona, administrados às 8 horas, pode-se prever que a quantidade do fármaco presente no organismo do paciente às 23 horas do mesmo dia será de, APROXIMADAMENTE:

a) $0{,}6$ mg b) 2 mg c) 3 mg d) 6 mg

6. (Ufrgs 2018) Considere a função real f definida por $f(x) = 2^{-x}.$

O valor da expressão $S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$ é

a) $S = 2 - 2^{-101}.$

b) $S = 2^{50} + 2^{-50}.$

c) $S = 2 + 2^{-101}.$

d) $S = 2 + 2^{-100}.$

e) $S = 2 - 2^{-100}.$

7. (Unicamp 2018) Considere a sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão w.

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.
b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$.

8. (Insper 2018) Mateus aplicou o capital C_0 à taxa de juros compostos de 1% em regime de capitalização mensal. Ao final do 12º mês, o montante total de capital na aplicação era igual a C_{12}. Se Mateus pretende resgatar seu dinheiro apenas ao final do 18º mês da aplicação, nessa ocasião ele resgatará um valor, descrito em função de C_0 e C_{12}, igual a

a) $C_0 \cdot \sqrt[3]{C_0 \cdot C_{12}}$
b) $\sqrt{C_0 \cdot C_{12}}$
c) $\dfrac{C_{12}}{C_0} \cdot \sqrt{C_0 \cdot C_{12}}$
d) $C_0 \cdot \sqrt{C_0 \cdot C_{12}}$
e) $\dfrac{C_{12}}{C_0} \cdot \sqrt{\dfrac{C_{12}}{C_0}}$

9. (Ita 2018) Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5. Determine o número de vértices do poliedro.

10. (Ime 2018) Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

Anotações:

Gabarito:

Resposta da questão 1:
a) A sequência a_n é igual a $(6, 4, 1, 2, 6, 4, 1, 2, \ldots)$.
Logo, é fácil ver que a_n é periódica. Ademais, teremos $S_n^k = 20$ sempre que tomarmos a subsequência de termos consecutivos $(4, 1, 2, 6, 4, 1, 2)$.
Portanto, o menor valor de n para o qual ocorre $S_n^k = 20$ é 2, com $k = 6$ (pois a subsequência possui sete termos).

b) Se $j = 1$, então
$S_n^k = 1 \Leftrightarrow a_{3+4\alpha} = 1,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 3 + 4\alpha$ e $k = 0$.

Se $j = 2$, então
$S_n^k = 2 \Leftrightarrow a_{4+4\alpha} = 2,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 4 + 4\alpha$ e $k = 0$.

Se $j = 3$, então
$S_n^k = 3 \Leftrightarrow a_{3+4\alpha} + a_{4+4\alpha} = 3,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 3 + 4\alpha$ e $k = 1$.

Se $j = 4$, então
$S_n^k = 4 \Leftrightarrow a_{2+4\alpha} = 4,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 2 + 4\alpha$ e $k = 0$.

Se $j = 5$, então
$S_n^k = 5 \Leftrightarrow a_{2+4\alpha} + a_{3+4\alpha} = 5,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 2 + 4\alpha$ e $k = 1$.

Se $j = 6$, então
$S_n^k = 6 \Leftrightarrow a_{1+4\alpha} = 6,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 1 + 4\alpha$ e $k = 0$.

Se $j = 7$, então
$S_n^k = 7 \Leftrightarrow a_{2+4\alpha} + a_{3+4\alpha} + a_{4+4\alpha} = 7,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 2 + 4\alpha$ e $k = 2$.

Se $j = 8$, então
$S_n^k = 8 \Leftrightarrow a_{4+4\alpha} + a_{5+4\alpha} = 8,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 4 + 4\alpha$ e $k = 1$.

Se $j = 9$, então
$S_n^k = 9 \Leftrightarrow a_{3+4\alpha} + a_{4+4\alpha} + a_{5+4\alpha} = 9,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 3 + 4\alpha$ e $k = 2$.

Se $j = 10$, então
$S_n^k = 10 \Leftrightarrow a_{1+4\alpha} + a_{2+4\alpha} = 10,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 1 + 4\alpha$ e $k = 1$.

Se $j = 11$, então
$S_n^k = 11 \Leftrightarrow a_{1+4\alpha} + a_{2+4\alpha} + a_{3+4\alpha} = 11,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 1 + 4\alpha$ e $k = 2$.

Se $j = 12$, então
$S_n^k = 12 \Leftrightarrow a_{4+4\alpha} + a_{5+4\alpha} + a_{6+4\alpha} = 12,$
com $\alpha \in \mathbb{N}$. Logo, temos $n = 4 + 4\alpha$ e $k = 2$.

c) Sabendo que a sequência é periódica, com $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 13$, para todo n inteiro positivo, podemos escrever $S_n^k = 13 \cdot q + r$, com $n \geq 1$, $k \geq 0$, $r \in \mathbb{N}$ e $r \leq 12$. Portanto, pelo item (b) e sabendo que todo inteiro positivo j pode ser escrito sob a forma $13 \cdot q + r$, segue o resultado.

Resposta da questão 2:
Considerando a tabela acima até a sétima linha, temos:

a) 32.

2						
4	6					
8	10	12				
14	16	18	20			
22	24	26	28	30		
32	34	36	38	40	42	
44	46	48	50	52	54	56

Interbits®

b) $44 + 46 + 48 + 50 + 52 + 54 + 56 = 350.$

c) Sabemos que o último elemento de cada linha é dado por: $m \cdot (m+1)$.
Portanto, a soma dos números nas n primeiras linhas será dada por:
$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + \ldots + m \cdot (m+1)$

Calculando o número de termos desta P.A. temos.
$$m \cdot (m+1) = 2 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow n = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$$

Portanto, a soma dos termos nas n primeiras linhas será dada por:
$$S = \frac{(2 + m \cdot (m+1))}{2} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} \Rightarrow S = \frac{\left(2 + m^2 + m\right) \cdot \left(m^2 + m\right)}{4}$$

Resposta da questão 3:
[C]

Calculando:

$A = B - r$
$B = B$
$C = B + r$
$D = B + 2r$

$$\frac{D^2 - A^2}{C^2 - B^2} = \frac{(B+2r)^2 - (B-r)^2}{(B+r)^2 - B^2} = \frac{B^2 + 4rB + 4r^2 - B^2 + 2rB - r^2}{B^2 + 2rB + r^2 - B^2} = \frac{6rB + 3r^2}{2rB + r^2} = \frac{3r \cdot (2B + r)}{r \cdot (2B + r)} = 3$$

Resposta da questão 4:
[B]

A sequência $(1, 2, 3, \ldots, n)$ é uma progressão aritmética tal que $S = 231$ e n é o total de filas formadas com todos os estudantes.
Daí,

$$231 = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$
$$2 \cdot 231 = n + n^2$$
$$n^2 + n - 462 = 0$$
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-462)}}{2 \cdot 1}$$
$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{2}$$
$$n = \frac{-1 \pm 43}{2}$$

Como $n > 0$,

$$n = \frac{-1 + 43}{2}$$
$$n = 21$$

Assim, foram formadas 21 filas com todos os estudantes.

Resposta da questão 5:
[B]

Considerando que a quantidade de medicamento se reduz à metade a cada 3 horas, podemos
Elaborar a seguinte tabela:

Horário	Quantidade do fármaco
8h	60 mg
11h	30 mg
14h	15 mg
17h	7,5 mg
20h	3,75 mg
23h	1,875 mg

Resposta da questão 6:
[E]

De $f(x) = 2^{-x}$ e $S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$, temos:

$$S = 2^{-0} + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-100}$$
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{100}}$$

A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{100}}\right)$ é uma progressão geométrica onde $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ e $n = 101$.
Daí,

$$S = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{101} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$
$$S = \frac{2^{-101} - 1}{-\frac{1}{2}}$$
$$S = -2 \cdot \left(2^{-101} - 1\right)$$
$$S = -2 \cdot 2^{-101} + 2 \cdot 1$$
$$S = 2 - 2^{-100}$$

Resposta da questão 7:
a) Se (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica, $a_3 = 3$ e $w = 2$, então

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{3}{2^2}, \frac{3}{2}, 3\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3\right).$$

Ademais, se (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, então
$(a_3, a_4, a_5) = (3, 3 + 2, 3 + 2 \cdot 2) = (3, 5, 7).$

Portanto, temos

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right).$$

b) Se $a_1 = 1$, então

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \left(1, w, w^2, w^2 + w, w^2 + 2w\right).$$

Mas $a_5 = 8$ e, portanto, vem

$$w^2 + 2w = 8 \Leftrightarrow (w+1)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow w + 1 = \pm 3$$
$$\Leftrightarrow w = -4 \text{ ou } w = 2.$$

Em consequência, temos
$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, -4, 16, 12, 8)$

ou
$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 2, 4, 6, 8).$

Resposta da questão 8:
[C]

Desde que

$$C_{12} = C_0 \cdot (1{,}01)^{12} \Rightarrow C_{12} = C_0 \cdot [(1{,}01)^6]^2$$

$$\Rightarrow (1{,}01)^6 = \sqrt{\frac{C_{12}}{C_0}},$$

temos

$$\begin{aligned} C_{18} &= C_{12} \cdot (1{,}01)^6 \\ &= C_{12} \cdot \sqrt{\frac{C_{12}}{C_0}} \\ &= C_{12} \cdot \frac{\sqrt{C_{12}}}{\sqrt{C_0}} \cdot \frac{\sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0}} \\ &= \frac{C_{12}}{C_0} \cdot \sqrt{C_{12} \cdot C_0}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 9:
Sejam $n, n-5$ e $n-10,$ respectivamente, as quantidades de arestas, faces triangulares e quadrangulares.

Então,

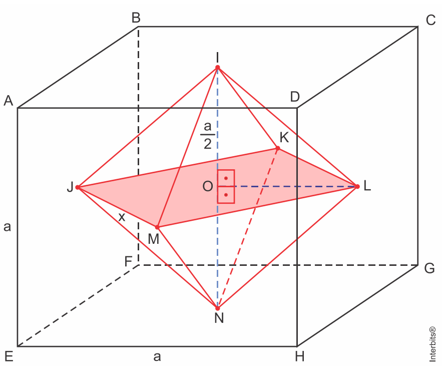
$$n = \frac{3 \cdot (n-5) + 4 \cdot (n-10)}{2}$$
$$2n = 3n - 15 + 4n - 40$$
$$n = 11$$

Logo, o poliedro possui 11 arestas, 6 faces triangulares e 1 face quadrangular, ou seja, possui 7 faces.
Dessa forma, sendo V o número de vértices do poliedro, temos:

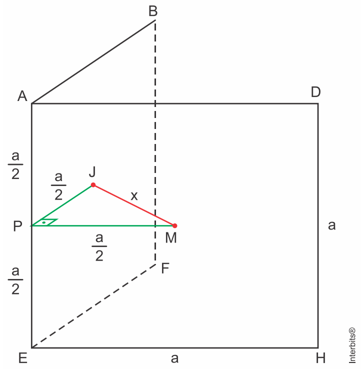
$$V - 11 + 7 = 2$$
$$V = 6$$

Resposta: Seis vértices

Resposta da questão 10:
Do enunciado, temos a figura abaixo:



$$V_{cubo} = a^3$$



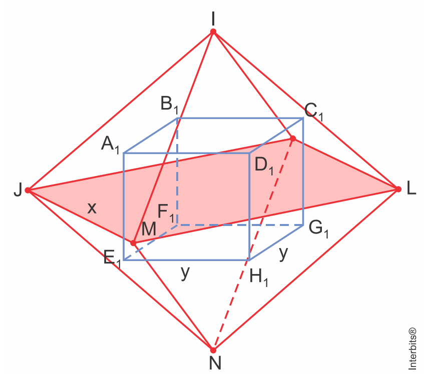
No triângulo $JMP,$

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

V_{IJKLM} : Volume da pirâmide de base quadrada $JKLM$ e vértice I.

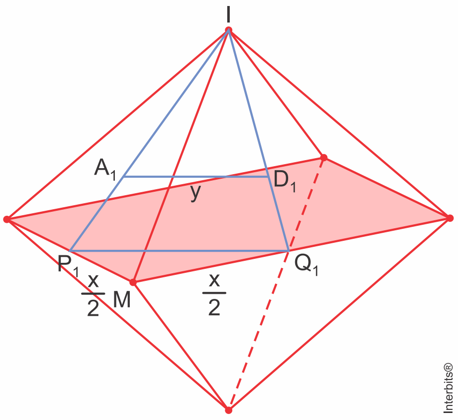
$$V_{octaedro} = 2 \cdot V_{IJKLM}$$
$$V_{octaedro} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{a}{2}$$
$$V_{octaedro} = \frac{a \cdot x^2}{3}$$
$$V_{octaedro} = \frac{a \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3}$$
$$V_{octaedro} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4}$$
$$V_{octaedro} = \frac{1}{6} \cdot a^3$$
$$V_{octaedro} = \frac{1}{6} V_{cubo}$$

Agora, observemos o octaedro e o cubo inscrito nele.



A_1 é baricentro do triângulo IJM.
D_1 é baricentro do triângulo ILM.

Dessa forma, temos a figura abaixo:



No triângulo P_1Q_1M,

$$(P_1Q_1)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$P_1Q_1 = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Da semelhança entre os triângulos IP_1Q_1 e IA_1D_1,

$$\frac{IA_1}{IP_1} = \frac{y}{P_1Q_1}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{y}{\frac{x\sqrt{2}}{2}}$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \frac{x\sqrt{2}}{3}$$

Assim, o volume do cubo $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ é dado por:

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = y^3 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{3}\right)^3$$

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = \frac{x^3 \cdot 2\sqrt{2}}{27}$$

Mas, $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, logo,

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = \frac{1}{27} \cdot a^3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$$

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = \frac{1}{27} a^3$$

$$V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{6} a^3\right)$$

Então, o volume do cubo inscrito no octaedro equivale a $\frac{2}{9}$ do volume do octaedro.

Dessa forma, sendo V o volume do primeiro cubo, temos:

Volume do primeiro octaedro: $\frac{1}{6}V$

Volume do segundo cubo: $\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6}V = \frac{V}{27}$

Volume do segundo octaedro: $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6}V = \frac{V}{162}$

Volume do terceiro cubo: $\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6}V = \frac{V}{729}$

Volume do terceiro octaedro: $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6}V = \frac{V}{4374}$

$\vdots$

Sendo r a razão pedida, temos:

$$r = \frac{\left(\frac{V}{6} + \frac{V}{162} + \frac{V}{4374} + \ldots\right) + \left(\frac{V}{27} + \frac{V}{729} + \ldots\right)}{V}$$

$$r = \frac{\frac{\frac{V}{6}}{1 - \frac{1}{27}} + \frac{\frac{V}{27}}{1 - \frac{1}{27}}}{V}$$

$$r = \frac{11}{52}$$

Resposta: $\frac{11}{52}$